

Title	2次元 versal Galois 被覆と有限群のクレモナ群への埋め込み (Recent Topics on Real and Complex Singularities)
Author(s)	徳永, 浩雄; 坂内, 真三
Citation	数理解析研究所講究録 (2006), 1501: 96-106
Issue Date	2006-07
URL	http://hdl.handle.net/2433/58428
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

2次元 versal Galois 被覆 と 有限群のクレモナ群への埋め込み

徳永浩雄¹, 坂内真三²

イントロダクション

本原稿の話はすべて複素数体 \mathbb{C} 上のものとする. X, Y は正規射影多様体, X から Y への全射有限射 $\pi: X \rightarrow Y$ が存在するとき, X を Y の被覆と呼ぶ. このとき, それぞれの有理函数体を $\mathbb{C}(X), \mathbb{C}(Y)$ で表すと $\mathbb{C}(X)$ は $\mathbb{C}(Y)$ の有限次代数拡大でその拡大次数は $\deg \pi$ である. 代数拡大 $\mathbb{C}(X)/\mathbb{C}(Y)$ が Galois 拡大のとき, X を Galois 被覆と呼ぶ. その Galois 群 $\text{Gal}(\mathbb{C}(X)/\mathbb{C}(Y))$ が有限群 G に同型のとき, 単に G -被覆と呼ぶ.

定義 0.1 G は有限群とする. G -被覆 $\varpi: X \rightarrow Y$ がつぎの性質を満たすとき, ϖ は versal であると呼ぶ:

任意の G -被覆 $\pi: W \rightarrow Z$ に対し, W から X への G -同値な有理写像 $\mu: W \dashrightarrow X$ で $\mu(W) \not\subset \text{Fix}(X, G)$, ただし $\text{Fix}(X, G) = \{x \in X \mid x \text{ の固定化群 } G_x \text{ が自明でない}\}$, を満たすものが存在する.

定義 0.1 は「任意の G -被覆が $\varpi: X \rightarrow Y$ の有理的引き戻しで得られる」ことに同値である.

versal G -被覆については以下のような性質が知られている:

- 任意の有限群 G に対し, versal G -被覆が存在する [7], [8]. ただし, 一意的ではない.
- G に対し, $\min\{\dim X \mid \varpi: X \rightarrow Y \text{ は versal } G\text{-被覆}\}$ とおくと, これは Buhler と Reichstein により導入された essential dimension, $\text{ed}_{\mathbb{C}}(G)$ に等しい ([2] 参照).
- $\text{ed}_{\mathbb{C}}(G) = 1$ となる有限群は巡回群か位数が $2n$ (n は奇数) の二面体群に限る.
- G の部分群 H に対し, $\text{ed}_{\mathbb{C}}(G) \geq \text{ed}_{\mathbb{C}}(H)$.
- $G = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\oplus r}$, p は素数ならば, $\text{ed}_{\mathbb{C}}(G) = r$.

¹首都大学東京

²東京都立大学大学院

- S_n で n 次対称群を表すとき, $n \geq 5$ ならば, $\text{ed}_{\mathbb{C}}(S_n) \leq n - 3$.

この稿で考えるのは, 2次元 versal G -被覆である. 上記の性質を使えば, 例えば G が $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\oplus 2}$, S_4 , A_4 , S_5 , A_5 (A_n は n 次交代群をあらわす) の場合は2次元の versal G -被覆が存在する. 2次元の versal G -被覆に関しては次の定理が基本的である ([10]):

定理 0.1 G は $\text{ed}_{\mathbb{C}}(G) = 2$ を満たす有限群とする. このとき, 以下の条件を満たす非特異有理曲面 X が存在する:

- 単射準同型 $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(X)$ が存在する. すなわち, G は X に忠実に作用する.
- 対 (X, G) は極小である. すなわち, G が忠実に作用する曲面 X' と G -同値な双有理射 $f: X \rightarrow X'$ が存在すれば f は同型
- G の作用による商を $Y := X/G$ とおくと, 商写像 $\varpi: X \rightarrow Y$ は versal G -被覆を与える.

定理 0.1 から $\text{ed}_{\mathbb{C}}(G) = 2$ を満たす有限群 G は2次元クレモナ群 $\text{Cr}_2(\mathbb{C})$ の有限部分群となることがわかる.

次に有限群の「versal な埋め込み」を以下のように定義する:

定義 0.2 X は正規射影多様体, $\text{Bir}(X)$ は X の双有理写像全体からなる群とする. 有限群 G から $\text{Bir}(X)$ の単射準同型 $\rho: G \rightarrow \text{Bir}(X)$ が以下の条件を満たすとき, ρ を versal な埋め込みと呼ぶ: \exists 正規射影多様体 X' such that (i) X' は X に双有理同値, (ii) ρ の像は $\text{Aut}(X')$ に含まれる, (iii) 商写像 $X' \rightarrow X'/G$ は versal G -被覆である.

$\text{ed}_{\mathbb{C}}(G) = 2$ のときはつぎの性質が知られている:

「埋め込み $\rho: G \rightarrow \text{Cr}_2(\mathbb{C})$ が versal になるか否かは Definition 0.2 の X' のとり方に依らない. versality は $\rho(G)$ の conjugate class に依る」 ([10])

従って, 2次元 versal G -被覆の研究は $\text{Cr}_2(\mathbb{C})$ の有限部分群の共役類の研究と関連があることがわかる. ここで例をひとつ挙げておく.

例 0.1 (i) σ_1 と σ_2 は以下のような \mathbb{P}^2 の自己同型とする

$$\sigma_1: [X_0, X_1, X_2] \mapsto [\omega X_0, \omega^2 X_1, X_2]$$

$$\sigma_2: [X_0, X_1, X_2] \mapsto [X_1, X_2, X_0],$$

ただし, $[X_0, X_1, X_2]$ は同時座標であり, $\omega = \exp(2\pi\sqrt{-1}/3)$ とする. G_1 として σ_1, σ_2 で生成された有限自己同型群を考えると

- (イ) $G_1 \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^{\oplus 2}$ かつ $\text{ed}_{\mathbb{C}}(G_1) = 2$ となるが,
- (ロ) $\varpi_{G_1} : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2/G_1$ は versal ではない.
- (ii) σ_1 と σ_2 は以下のような \mathbb{P}^2 の自己同型とする

$$\sigma_1 : [X_0, X_1, X_2] \mapsto [X_0, \omega X_1, X_2]$$

$$\sigma_2 : [X_0, X_1, X_2] \mapsto [X_0, X_1, \omega X_2],$$

ただし, $[X_0, X_1, X_2]$ は同時座標であり, $\omega = \exp(2\pi\sqrt{-1}/3)$ とする. G_2 として σ_1, σ_2 で生成された有限自己同型群を考えると

- (イ) $G_2 \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^{\oplus 2}$ かつ $\text{ed}_{\mathbb{C}}(G_1) = 2$ であり,
 - (ロ) $\varpi_{G_2} : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2/G_2$ は versal G -被覆である.
- 特に例 0.1 の G_1, G_2 は $\text{Cr}_2(\mathbb{C})$ の中で共役ではないことがわかる.

$\text{ed}_{\mathbb{C}}(G) = 2$ を満たす有限群に関して, 素朴な問題として,

問 0.1 $\text{ed}_{\mathbb{C}}(G) = 2$ を満たす群 G で $\text{Cr}_2(\mathbb{C})$ への共役でない versal な埋め込みを二つ以上もつ例はあるか?

というのが考えられる. さて, S_4 や A_5 については, これまでの研究で二通りの versal 被覆が存在することが知られている (§1 参照). 本稿の主題は「これらの被覆から与えられる $\text{Cr}_2(\mathbb{C})$ への埋め込みの像が共役になるか?」という問題であり, この問題に関するわれわれの解答は以下の通りである.

定理 0.2 §1 で与えられた S_4, A_5 の $\text{Cr}_2(\mathbb{C})$ の二通りの埋め込みはともに versal であるが, 互いに共役ではない

以下この結果に関し, その概略を述べる. 詳細は [1] を参照して頂きたい.

1 ふたつの versal S_4 -被覆と versal A_5 -被覆

1.1 Versal S_4 -被覆

S_4 は 4 次対称群とする. ここでは S_4 を記述するのにつぎの表現を用いる

生成元: $\sigma, \tau, \lambda_1, \lambda_2$

関係式: $\sigma^2 = \tau^3 = \lambda_1^2 = \lambda_2^2 = 1$

$\sigma\tau = \tau^2\sigma, \lambda_1\lambda_2 = \lambda_2\lambda_1$

$\sigma\lambda_2\sigma = \lambda_2, \sigma\lambda_1\sigma = \lambda_1\lambda_2$

$\tau^2\lambda_2\tau = \lambda_1, \tau^2\lambda_1\tau = \lambda_1\lambda_2$

$\rho: S_4 \rightarrow \mathrm{GL}(3, \mathbb{C})$ は以下のような忠実な既約表現とする:

$$\begin{aligned} \sigma &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \tau &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_1 &\mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \lambda_2 &\mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Versal S_4 -被覆 $\varpi_{S_4,1}: X_1 \rightarrow Y_1$

X_1 は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 内で次の定義方程式で与えられる曲面とする:

$$x_0y_0z_0 - x_1y_1z_1 = 0,$$

ただし, $([x_0, x_1], [y_0, y_1], [z_0, z_1])$ は同次座標を表す. $x = x_1/x_0, y = y_1/y_0, z = z_1/z_0$ とおく. $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上の S_4 作用を以下のように定義する:

$$\begin{aligned} (x, y, z)^\sigma &= (y, x, z) \\ (x, y, z)^\tau &= (y, z, x) \\ (x, y, z)^{\lambda_1} &= (-x, y, -z) \\ (x, y, z)^{\lambda_2} &= (-x, -y, z) \end{aligned}$$

X_1 の定義方程式は S_4 の作用で不変なので S_4 は X_1 に作用する (この作用は忠実である). $Y_1 = X_1/G$ とおき, 商写像を $\varpi_{S_4,1}: X_1 \rightarrow Y_1$ で表す. [9] 及び [11] より, $\varpi_{S_4,1}: X_1 \rightarrow Y_1$ は versal S_4 -被覆である.

X_1 上のこの S_4 -作用について少し見ておこう. まず, X_1 は次数 6 の del-Pezzo 曲面, つまり, X_1 は \mathbb{P}^2 を相異なる 3 点で blow-up して得られる.

補題 1.1 方程式 $x_0y_0z_0 = 0$ で与えられる X_1 上の因子は 6 つの既約成分 C_1, C_2, \dots, C_6 からなる. 各 C_i は自己交点数が -1 の非特異有理曲線である.

証明. $p_{12} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ は最初の二つの成分への射影とする. すると, 定義方程式から, p_{12} の X_1 への制限は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ を $([1, 0], [0, 1])$ と $([0, 1], [1, 0])$ で blow-up したものであることがわかる. 主張はこの考察から簡単に従う.

補題 1.2 $\text{Pic}(X_1)$ は X_1 の Picard 群とする. $\text{Pic}^{S_4}(X_1) = \mathbb{Z}(-K_{X_1})$ が成立する.

証明. $-K_{X_1} \sim \sum_{i=1}^6 C_i$, であり, これが, $\text{Pic}^{S_4}(X_1)$ を生成することは容易に確かめられる.

$x \in X_1$ に対し, $d_x = \#O(x)$, ただし $O(x)$ は x の S_4 軌道を表すものとする. ここでは, $d_x < 6$ をみたす点について考察する.

補題 1.3 (i) $d_x = 1, 2, 5$ をみたす点は存在しない.

(ii) $d_x = 4$ を満たすのは以下の 12 点である.

$$\begin{array}{cccc} R_{11}(1, 1, 1) & R_{12}(1, -1, -1) & R_{13}(-1, -1, 1) & R_{14}(-1, 1, -1) \\ R_{21}(\omega, \omega, \omega) & R_{22}(\omega, -\omega, -\omega) & R_{23}(-\omega, -\omega, \omega) & R_{24}(-\omega, \omega, -\omega) \\ R_{31}(\omega^2, \omega^2, \omega^2) & R_{32}(\omega^2, -\omega^2, -\omega^2) & R_{33}(-\omega^2, -\omega^2, \omega^2) & R_{34}(-\omega^2, \omega^2, -\omega^2), \end{array}$$

ここで, 点を表す座標はアフィン座標 (x, y, z) であり, $\omega = \exp(2\pi\sqrt{-1}/3)$ である. これらの 12 点は 3 つの軌道からなる.

(iii) $d_x = 4$ を満たすのは以下の 6 点である.

$$\begin{array}{ccc} P_1([0, 1], [1, 0], [0, 1]) & P_2([1, 0], [0, 1], [0, 1]) & P_3([0, 1], [0, 1], [1, 0]) \\ Q_1([1, 0], [1, 0], [0, 1]) & Q_2([1, 0], [0, 1], [1, 0]) & Q_3([0, 1], [1, 0], [1, 0]). \end{array}$$

記号は (ii) と同様で, これらの 6 点は 2 つの軌道からなる.

証明. 以下の 2 点

- τ は $x_0 y_0 z_0 = 0$ で与えられる因子に自由に作用する.
- 部分群 $\langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$ はアフィン曲面 $xyz = 1$ 上で固定点を持たない.

に考慮すれば, 上記の主張は容易に従う.

補題 1.4 方程式 $x_i = \omega^i x_0 (i = 0, 1, 2)$ で与えられる因子は自己交点数が 0 の非特異有理曲線である.

証明. 補題 1.1 の証明から, 上記の因子は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上の自己交点数 0 の曲線から得られている. これらの曲線は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ で点 $([1, 0], [0, 1])$, $([0, 1], [1, 0])$ を通らないので, 補題の主張が従う.

Versal S_4 -被覆 $\varpi_{S_4,2} : X_2 \rightarrow Y_2$

Proposition 4.1 (ii) ([9]) より, ρ を用いて versal S_4 -被覆 $\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2/S_4$ を得る. $X_2 = \mathbb{P}_2$, $Y_2 = \mathbb{P}^2/S_4$ $\varpi_{S_4,2} =$ 商写像とおいてふたつめの versal S_4 -被覆を得る.

1.2 versal A_5 -被覆

まず, 以下の補題から始める:

補題 1.5 S は非特異射影曲面とし, 5 次交代群 A_5 が S に忠実に作用するものとする. $x \in S$ に対し, d_x はこれまで同様 x の軌道の個数とすると, S 上で $d_x < 5$ を満たす点は存在しない.

証明. $d_x = 1$ のとき, $d_x = 1$ を満たす点 x が存在するとする. すると, 自明でない準同型 $\eta : A_5 \rightarrow \mathrm{GL}(T_x S)$, ただし $T_x S$ は x における接空間, が存在する. A_5 は単純群なので, η は単射となるが, A_5 は 2 次の忠実な表現を持たないのでこれは矛盾である.

$d_x = 2, 3, 4$ のとき, このような点 x が存在したとする. x における固定化群 G_x は A_5 の指数 d_x の部分群である. このとき, A_5 から d_x 次対称群 S_{d_x} へ準同型が存在する. この準同型は自明でない核をもつが, これは A_5 が単純群であることに矛盾する.

Versal A_5 -被覆 $\varpi_{A_5,1} : X_1 \rightarrow Y_1$

X_1 は次数 5 の del-Pezzo 曲面とする. このとき, $\mathrm{Aut}(X_1) \cong S_5$ (例えば [6] 参照) である. [3] にある結果をもちいると, $X_1 \rightarrow X_1/A_5$ が versal A_5 -被覆を与えることがわかる. $Y_1 = X_1/A_5$, $\varpi_{A_5,1} : X_1 \rightarrow Y_1$ とおく.

Versal A_5 -被覆 $\varphi_{A_5,2} : X_2 \rightarrow Y_2$

$\rho : A_5 \rightarrow \mathrm{GL}(3, \mathbb{C})$ は A_5 の 3 次既約表現とする. この ρ をもちいて versal S_4 -被覆 $\varpi_{S_4,2} : X_2 \rightarrow Y_2$ と同様にして, もう 1 つの versal A_5 -被覆 $\varpi_{A_5,2} : X_2 \rightarrow Y_2$ を得る.

2 定理 0.2 の証明の概略

ここでは定理 0.2 の証明の概略をのべる. 詳しくは [1] を参照されたい.

証明のアイデアは [4] にあるもので要となるツールは Noether の不等式と呼ばれるものである.

その一般形と証明は [1], [5] を参照されたい. 我々のセッティングでは以下のようになる:

G は S_4 または A_5 を表すものとし, $X_1, X_2 (= \mathbb{P}^2)$ は §1 で述べたもののいずれかとする. X_1 から X_2 への G -同値な双有理写像

$$\Phi: X_1 \dashrightarrow X_2 = \mathbb{P}^2$$

が存在したとする. $|l|$ は \mathbb{P}^2 の直線のなす完備一次系とし, $\mathcal{H} = \Phi^{-1}(|l|)$ とする. このとき, 以下の二つが成立する:

- $H \in \mathcal{H}$ は $-aK_{X_1}$ ($a > 0$) に線形同値
- \mathcal{H} は fixed component free であり, その base point は $\cup_{\lambda} O(x_{\lambda})$ ($x_{\lambda} \in X_1$) の形をしている.

上記の軌道に関し,

$r_{\lambda}: x \in O(x_{\lambda})$ の \mathcal{H} における重複度,

$d_{\lambda} := \sharp(O(x_{\lambda}))$,

とおく. このとき, Noether の不等式の主張はつぎのようになる:

「 $\exists O(x_{\lambda_0})$ such that $r_{\lambda_0} > a$ 」 ($O(x_{\lambda_0})$ を Φ の maximal singularity という)

$a^2 K_{X_1}^2 \geq r_{\lambda_0}^2 d_{\lambda_0}$ ゆえ, Noether の不等式から $K_{X_1}^2 > d_{\lambda_0}$ を得る.

2.1 $G = S_4$ のとき

$K_{X_1}^2 = 6$ ゆえ, $d_{\lambda_0} < 6$ となる.

補題 2.1 $d = 4$ をみたす $O(x)$ は maximal singularity にはならない.

証明. E_i は 補題 1.4 に出てくる X_1 上の因子で $x_1 = \omega^i x_0$ ($i = 0, 1, 2$) で与えられるものとする. $O((\omega^i, \omega^i, \omega^i))$ が maximal singularity であったとする. $q: \hat{X}_1 \rightarrow X_1$ は $O((\omega^i, \omega^i, \omega^i))$ での blow-up とする. すると線形系 $q^*\mathcal{H} - r(R_{i1} + R_{i2} + R_{i3} + R_{i4})$

は fixed component を持たない (ここでは, 点 R_{ij} ($j = 1, 2, 3, 4$) とこれから現れる例外曲線を同一視している). \bar{E}_i は E_i の proper transform とする. すると,

$$(-aq^*K_{X_1} - r \sum_{j=1}^4 R_{ij})\bar{E}_i = 2a - 2r < 0.$$

となるが, これは \bar{E}_i が $q^*\mathcal{H} - r(R_{i1} + R_{i2} + R_{i3} + R_{i4})$ の fixed component であることを表し, 矛盾である.

補題 2.2 $d = 3$ をみたす $O(x)$ は maximal singularity にはならない.

証明. $O(P_1) = \{P_1, P_2, P_3\}$ が maximal singularity であったとする. このとき, (必要なら番号をつけかえて) 因子 $x_0y_0z_0 = 0$ の既約成分 C_1 が P_1 を通ると仮定してよ. $q: \hat{X}_1 \rightarrow X_1$ は $O(P_1)$ での blow-up とする. このとき, 線形系 $q^*(\mathcal{H}) - r(P_1 + P_2 + P_3)$ fixed component を持たない (ここでは P_i ($j = 1, 2, 3$) と対応する例外曲線を同一視している) \bar{C}_1 は C_1 の proper transform とする. すると

$$(-aq^*K_{X_1} - r \sum_{j=1}^3 P_j)\bar{C}_1 = a - r < 0.$$

となるが, これは \bar{C}_1 が $q^*\mathcal{H} - r(P_1 + P_2 + P_3)$ の fixed component であることを表し, 矛盾である.

2.2 $G = A_5$ のとき

S_4 のときと同様, Φ の存在から $\sharp(O(x)) < 5$ を満たす A_5 -軌道 $O(x)$, $x \in X_1$ が存在することがわかる. これは補題 1.5 に反する.

以上で定理 0.2 が証明された.

3 $\varpi_{S_4,1}: X_1 \rightarrow Y_1$ と $\varpi_{S_4,2}: X_2 \rightarrow Y_2$ の比較

前節までで, $\varpi_{S_4,1}$ と $\varpi_{S_4,2}$ から与えられる S_4 の $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ への埋め込みが互いに共役でないことを示した. この節では, 二つの関係を調べる.

$\varpi_{S_4,1}$ と $\varpi_{S_4,2}$ がともに versal であることから, S_4 -同値な有理射像 $\mu_1: X_1 \dashrightarrow X_2$, $\mu_2: X_2 \dashrightarrow X_1$ で $\mu_1(X_1) \not\subset \mathrm{Fix}(X_2, S_4)$, $\mu_2(X_2) \not\subset \mathrm{Fix}(X_1, S_4)$ を満たすものが存在する. $\mathrm{ed}_{\mathbb{C}}(S_4) = 2$ であることから, 1次元の versal S_4 -被覆は存在しないので, μ_1, μ_2 はともに支配的である.

μ_i ($i = 1, 2$) は以下の条件を満たすようにとることができることを示す.

1. $\mu_i (i = 1, 2)$ によって引き起こされる拡大 $\mathbb{C}(X_1)/\mathbb{C}(X_2)$ と $\mathbb{C}(X_2)/\mathbb{C}(X_1)$ はともに 3 次の巡回拡大である.
2. $\mathbb{C}(X_2)/(\mu_2 \circ \mu_1)^*(\mathbb{C}(X_2))$ は Galois 拡大であり, その Galois 群は $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^{\oplus 2}$ と同型である.

G を $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ の有限部分群で, 以下の行列で生成される物とする:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix},$$

このとき, 以下のことが成立する:

1. $|G| = 216$.
2. H_1 を A, B, C_1, C_2 で生成される部分群とすると, $H_1 \cong S_4$
3. H_2 を D_1, D_2 で生成される部分群とすると, H_1 は G の正規部分群であり, G は H_1 と H_2 の半直積である.
4. H_3 を $D_1 D_2^2$ で生成される部分群とすると, H_3 は G の正規部分群である.
5. S_4 の A, B, C_1, C_2 による表現は, §1.1 で与えられたものと共役であり, その対応は $\rho(\tau)(\rho(g))\rho(\tau)^{-1}$, $g \in S_4$ で与えられる.

$[X_0, X_1, X_2]$ を \mathbb{P}^2 の斉次とし, \mathbb{P}^2 への G の作用を

$$[X_0, X_1, X_2]^g := [X_0, X_1, X_2]A_g,$$

で定める. ここで A_g は $g \in G$ に対応する行列を表す. $x = X_1/X_0$, $y = X_2/X_0$ とおくと, $\mathbb{C}(\mathbb{P}^2) = \mathbb{C}(x, y)$ であり, G の作用は

$$(x, y)^A = (y, x), \quad (x, y)^B = (y/x, 1/x), \quad (x, y)^{C_1} = (x, -y),$$

$$(x, y)^{C_2} = (-x, -y), \quad (x, y)^{D_1} = (\omega x, y), \quad (x, y)^{D_2} = (x, \omega y).$$

で与えられる.

補題 3.1 $u, v \in \mathbb{C}(\mathbb{P}^2)^{H_3}$ で以下の条件を満たすものが存在する,

1. $\mathbb{C}(\mathbb{P}^2)^{H_3} = \mathbb{C}(u, v)$

2. H_1 によって引き起こされる $\mathbb{C}(\mathbb{P}^2)^{H_3}$ への S_4 の作用は以下のように与えられる:

$$\begin{aligned}(u, v)^A &= (v, u), & (u, v)^B &= (v, 1/(uv)), \\ (u, v)^{C_1} &= (-u, v), & (u, v)^{C_2} &= (-u, -v).\end{aligned}$$

証明. $u = x^2/y, v = y^2/x$ とすればよい.

補題 3.1 により $\mathbb{C}(\mathbb{P}^2)^{H_3}$ と $\mathbb{C}(X_1)$ は S_4 の作用を含めて次の様に同一視できる. (x, y, z) を §1 で与えられた $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の非同次座標とすると, X_1 は $xyz = 1$ で定義されている. $x = u, y = v, z = 1/uv$ とおけばよい. また, $\mathbb{P}^2/H_2 \cong \mathbb{P}^2$ であり, H_1 により誘導される $\mathbb{P}^2, \mathbb{P}^2/H_2$ への S_4 の作用は, X_2 への S_4 の作用と同一視される.

次に以下の体の系列を考える:

$$\begin{array}{ccccc}\mathbb{C}(\mathbb{P}^2) & \supset & \mathbb{C}(\mathbb{P}^2)^{H_3} & \supset & \mathbb{C}(\mathbb{P}^2)^{H_2} \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ \mathbb{C}(X_2) & & \mathbb{C}(X_1) & & \mathbb{C}(X_2)\end{array}$$

この系列に対応して, $\mu_2: X_2 \dashrightarrow X_1$ と $\mu_1: X_1 \dashrightarrow X_2$ が得られる. μ_i ($i = 1, 2$) が S_4 同値であるのは, S_4 の作用が H_1 から引き起こされていることから従う. また, $(\mu_2 \circ \mu_1)^*(\mathbb{C}(X_2)) \subset \mathbb{C}(X_2)$ は $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^{\oplus 2}$ -拡大である. よって, 求める条件を満たす S_4 -同値な有理射 μ_1 と μ_2 が得られた.

注意 3.1 A_5 についても, $\varpi_{A_5,1}$ と $\varpi_{A_5,2}$ の間に上のように簡明な関係があるか調べるのも興味深い問題であると思われる.

参考文献

- [1] S. Bannai and H. Tokunaga: A note on embeddings of S_4 and A_5 into the Cremona group and versal Galois covers, arXiv: mathAG/0510503.
- [2] J. Buhler and Z. Reichstein: On the essential dimension of a finite group, Comp. Math. **106** (1997), 159-179.

- [3] K. Hashimoto and H. Tsunogai: *Generic polynomials over \mathbb{Q} with two parameters for the transitive groups of degree five*, Proc. Japan Acad. **79** (2003), 142-145.
- [4] V.A Iskovskikh: *Two non-conjugate embeddings of $S_3 \times \mathbb{Z}$ into the Cremona group II*, arXiv:math.AG/0508484.
- [5] V. A. Iskovskikh: *Factorization of birational maps of rational surfaces from the viewpoint of Mori theory*, Russian Math. Surveys **51**(1996), 585-652.
- [6] M. Koitabashi: *Automorphism Groups of Generic Rational surfaces*, J. of Algebra, **116**, 130-142 (1988).
- [7] M. Namba: *On finite Galois Coverings of projective manifolds*, J. Math. Soc. Japan, **41**, 391-403.
- [8] M. Namba: *Finite branched coverings of complex manifold*, Sugaku Expositions **5** (1992) 193-211.
- [9] H. Tokunaga: *2-dimensional versal S_4 -covers and rational elliptic surfaces*, Séminaire et Congrès **10**, Société Mathématique de France (2005), 307-322.
- [10] H. Tokunaga: *2-dimensional versal G -covers and Cremona embeddings of finite groups*, to appear in Kyushu J. of Math.
- [11] H. Tsuchihashi: *Galois coverings of projective varieties for the dihedral groups and the symmetric groups*, Kyushu J. of Math. **57**(2003), 411-427.